Nº100. Mayo/09. Publicación semanal

LOS CONTENIDOS EN LA ENSEÑANZA

Contenidos desarrollados

profesores en el aula
ASOCIACIÓN

LOS CONTENIDOS EN LA ENSEÑANZA
Número 100 / Mayo 2009
Publicación Semanal

Editor y Redacción
Asociación Profesores en el aula
C/ Gran Vía nº 54
18010 GRANADA
Tef. 902504784

redaccion@profesoresenelaula.com
www.profesoresenelaula.com

Impresión
D.L.: GR 349-2009
ISSN: 2171-4363

Diseño
Portada: Mª José Ruiz Pulido
Interior: J. David Quevedo Blasco
Vanesa Espín Martín

Los Contenidos en la Enseñanza

Número 100

Mayo 2009

Índice

PRESENTACIÓN

La educación tiene como meta la transmisión de conocimientos de una generación a otra; no obstante, el proceso de transmisión y actualización de conocimientos no es suficiente, ya que se necesita, además, capacidad de prever las futuras circunstancias de comunicación de los seres humanos entre sí y su entorno; es decir, el adecuado diálogo de los seres humanos entre sí y su entorno

Cuando se hace explícito lo que se quiere enseñar aparece una nueva pregunta, esta vez por la organización que se quiere dar a aquello que se pretende enseñar: relaciones entre conceptos, entre conceptos y procedimientos, entre valores, procedimientos y conceptos, etc.

En este número de nuestra revista *Contenidos en la Enseñanza*, los autores/as se detienen en conceptos varios, a través de diferentes áreas o ámbitos de aprendizaje.

En primer lugar, **Rosario González Sarrias**, en su artículo, con carácter científico, "Enseñanza de la Matemática y Teoría de Conjuntos (I)", recoge los orígenes e importancia de la teoría de conjuntos y reestructuración de la matemática. La teoría de conjuntos constituyó el centro de un intento de reforma de la matemática a finales del siglo XX en el que se pretendía formalizar las matemáticas y que recibió el nombre de "matemática moderna". Vemos cómo y por qué surge la matemática moderna, cuáles son sus consecuencias y la causa de su fracaso recordando la importancia de la teoría de conjuntos en el marco de la matemática actual.

Seguidamente **Natalia Revelles López,** en su artículo "*La belleza del cuerpo humano en el arte*", destaca el cuerpo como uno de los elementos más representados por los artistas, dependiendo de las creencias del hombre o de sus ideales de belleza podemos admirar diversas obras de arte sobre el desnudo.

Continúa **José Carlos Núñez Vidal**, describiendo en "*Comentario de mapas históricos. Técnica y modelos*" mediante un guión, los pasos a seguir para realizar un comentario de mapa histórico, tomando de referencia diferentes y diversas fuentes. Utiliza 8 ejemplos de comentarios para ver en lo concreto la aplicación de este guión, abarcando todas las etapas de la historia: prehistoria (Edad Antigua, Medieval y Contemporánea.

Para cerrar esta presentación, **Pablo López de Aramburu**, en su artículo "*Rehabilitación del forjado. Refuerzo del forjado de madera"*, expone las razones por las que este tipo de forjado se deteriora, presentando un método con el que reforzar el comportamiento estructural del forjado en general y solucionar los problemas de huecos debido al paso del tiempo, efectos de humedad...

Un saludo

LA REDACCIÓN

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS (I). Orígenes e importancia de la teoría de conjuntos y reestructuración de la matemática.

Rosario González Sarrias

Resumen

La teoría de conjuntos constituyó el centro de un intento de reforma de la matemática a finales del siglo XX en el que se pretendía formalizar las matemáticas y que recibió el nombre de "matemática moderna". Muchos fueron los que apoyaron esta reestructuración por múltiples motivos, que se intentó llevar hasta los currículos de primaria y secundaria pero la aparición de paradojas dentro de ésta la convirtió en una fase para recordar. Veamos cómo y por qué surge la matemática moderna, cuáles son sus consecuencias y la causa de su fracaso recordando la importancia de la teoría de conjuntos en el marco de la matemática actual.

Abstract

Set theory constituted the center of an intention of reform of the matematics at last of the 20th century, in which it tries to formalize the matematics called "modern matematics". A lot of people supported this restructuring for multiples reasons, that tried to take it to elementary and secundary education's curriculum but the appearance of paradoxs in this one turn her in a stage to remember. Let's see how and why the modern matematics arises, which are her consequenses and the causes of her failure remembering the importance of the set theory whitin the framework of the actual matematics.

Palabras clave: conjunto - matemática moderna – número – paradoja

Key words: set - modern matematics – number - paradox

INTRODUCCIÓN

CONTROVERSIA EN TORNO A LA TEORÍA DE CONJUNTOS

La importancia de la teoría de conjuntos como lenguaje unificador de distintas ramas de las matemáticas hizo que en la reforma de la enseñanza conocida como "matemática moderna", se diera especial énfasis a estos contenidos en los currículos de primaria y secundaria entre los años 1960 y 1970 y en algunos países incluso en la década de los 80.

Nótese que, a pesar de la relevancia que estas nociones han tenido en los diferentes niveles educativos, se produjeron fuertes críticas a su enseñanza en primaria y secundaria por parte de prestigiosos matemáticos de la época tales como Feynman (1965), Kline (1973), Freudenthal (1986)…y como consecuencia de estas críticas se decide suprimir los contenidos conjuntistas en estos niveles.

Analicemos cuál es el origen de la teoría de conjuntos, sus causas y consecuencias así como las distintas posturas posibles ante el papel y el estudio de la teoría de conjuntos en los currículos de primaria y secundaria, entendiendo por 'currículo' (Gimeno Sacristán, 1996) el proyecto o plan educativo integrado por diferentes aspectos, experiencias y orientaciones.

APARICIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y RELEVANCIA

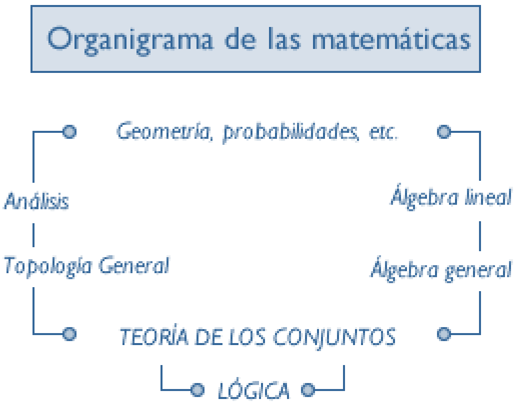
- **Origen de la teoría de conjuntos y aparición de la matemática moderna**

El lanzamiento en 1957 del primer satélite artificial de la historia (el Sputnik 1) por la Unión Soviética propició en EE.UU. la alarma sobre la inferioridad nacional en los campos científico y tecnológico y al constatar el bajo nivel norteamericano en educación matemática, surgió la idea, secundada en los ámbitos políticos y económicos, de que era necesaria una reforma. Para ello, se supuso que era preciso abandonar la enseñanza del plan tradicional, unas matemáticas con contenidos separados y anteriores a 1700, sustituyéndolas por otras más «modernas». Dada la importancia de las matemáticas abstractas en el último siglo, con la unificación de sus ramas mediante conceptos generales y estructuras, se propuso reconstruir las matemáticas de la enseñanza elemental desde ese punto de vista global. Y se vio la necesidad de reeducar a los profesores, comenzando por doquier los cursillos de Teoría de Conjuntos. Pero se pensó, como apunta Kline (1973) que:"Un plan que pudiera ser ideal para la formación de futuros matemáticos no puede ser el correcto para la formación básica de toda la población..."

Paralelamente el alemán Georg Cantor (1845-1918) formuló prácticamente de manera individual la teoría de conjuntos o teoría conjuntista a finales del siglo XIX y principios del XX con el objetivo de formalizar las matemáticas como ya se había hecho con el cálculo cien años antes. Cantor comenzó esta tarea por medio del análisis de las bases de las matemáticas y explicó **todo** basándose en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hace estrictamente por medio de conjuntos) con lo que logró unificar a las matemáticas y permitió la comprensión de nuevos conceptos.

Matemático alemán Georg Cantor.

A esta reestructuración de la matemática en base a la teoría de conjuntos unida al método axiomático desarrollado por David Hilbert (1862-1943) es a la que se llamó "**matemática moderna**", que se implantó primero en el sistema norteamericano de educación y posteriormente en Europa llegando así a nuestro país. Según esta reforma, las matemáticas se organizarían según la figura 2 que podemos ver a continuación:



Organigrama de la matemática moderna.

Después de la guerra de 1914-18, ya cerca del año 1930, el grupo Bourbaki (jóvenes matemáticos franceses grandes admiradores de Poincaré y de Hilbert) editó un libro de texto con los últimos descubrimientos y tendencias matemáticas en el que recogieron su pretensión de tomar como punto de partida de las matemáticas la lógica formal y la teoría de conjuntos y obtener una estructura axiomática y sistemática de ésta, correspondiéndose con la organización de la matemática moderna. El propósito del grupo Bourbaki era devolver a Francia la posición que antaño había ocupado en la historia de la Ciencia Matemática.

Y ya en los años setenta, en plena explosión de la llamada matemática moderna y con el antecedente del grupo Bourbaki, se pretendía llevar desde la universidad a las enseñanzas básica (actualmente, primaria) y secundaria el método axiomático, el lenguaje lógico-simbólico y las estructuras algebraicas que habían servido durante el siglo precedente para unificar las matemáticas.

- **Fracaso de la matemática moderna y cuestiones para el debate**

El problema apareció cuando varios matemáticos, incluyendo al mismo Cantor, comenzaron a encontrar paradojas en esta teoría y a preguntarse si las matemáticas en realidad eran consistentes, y sobre todo verdaderas, ya que cualquier suposición matemática podía basarse en una teoría inconsistente. Podemos citar a modo de ejemplo la paradoja encontrada por Russell (1901) que se basa en las contradicciones del concepto de conjunto dado por Cantor y que se explica de la siguiente forma: *"Los conjuntos parecen ser de dos tipos: los que se contienen a sí mismos como miembros y los que no. Un ejemplo de los primeros sería el conjunto de las cosas pensables, pues a su vez es una cosa pensable. Un ejemplo de los segundos sería el conjunto de los matemáticos, pues el conjunto en sí no es un matemático y, por tanto, no pertenece al conjunto* *como miembro. Consideremos ahora el conjunto todos los conjuntos que no se contiene a sí mismos como miembro. Llamémosle T. ¿está T contenido en sí mismo como miembro? Si lo está, por definición no se contiene a sí mismo, luego no lo está. Pero si no lo está, por definición, debe estar."* La forma más popular de esta paradoja, mucho más elegante desde un punto de vista literario aunque menos correcta desde un punto de vista formal y matemático, se conoce como la paradoja del barbero y se recoge en la siguiente afirmación: *"El barbero de esta ciudad únicamente afeita a todos aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos. El barbero de esta ciudad ¿se afeita a sí mismo?".* Si suponemos que el barbero se afeita a sí mismo, entonces es uno de los hombres que se afeitan a sí mismos, y el barbero de esta ciudad únicamente afeita aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos, lo que es contradictorio con la hipótesis de partida. Pero si suponemos que el barbero de esta ciudad no se afeita a sí mismo, entonces forma parte de los hombres que no se afeitan a sí mismos y el barbero de esta ciudad afeita a todos aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos, lo que también es contradictorio con la hipótesis de partida. Existe otro enunciado similar: el del cartero que únicamente entrega el correo a todos aquellos que no acuden a recogerlo a la oficina de correos. ¿Quién entrega el correo a este cartero?

Por otra parte la mejor prueba de que la teoría de conjuntos no ha logrado unificar a las matemáticas es que éstas se han ramificado en áreas muy diferenciadas, como la aritmética, el álgebra, la trigonometría y la geometría; también se han separado distintos campos como el cálculo, la topología, la teoría de conjuntos, la teoría de los números y la estadística.

Pero las cuestiones que nos motivan en este momento son: ¿es útil el lenguaje conjuntista para desarrollar las programaciones de primaria y secundaria? ¿en qué medida se debería estudiar la teoría de conjuntos en estos niveles según la legislación vigente? ¿interesa incluir un tema introductorio en el programa sobre conjuntos, relaciones y aplicaciones, o por el contrario, dichos contenidos pueden y deben ser tratados de manera implícita y a medida que se usan?

Antes de ello, que será desarrollado en la segunda parte de este artículo, fundamentemos una vez más la relevancia de la teoría de conjuntos como centro o punto de apoyo de conceptos y construcciones básicas de la matemática actual a pesar del fracaso del intento de implantación de la matemática moderna en los currículos de la enseñanza.

- **Importancia de la teoría de conjuntos: relación con los números**

Teniendo en cuenta la amplitud de la cuestión veamos uno de los motivos por los que la teoría de conjuntos forma parte de la matemática desde sus inicios; esto es, las relaciones de los conjuntos con los números naturales, dado el carácter central que los números desempeñan en la matemática escolar y ya que éstos son contenidos de cualquier etapa educativa.

Las nociones básicas de la teoría de conjuntos están involucradas implícita o explícitamente en las diversas construcciones de los números naturales. El uso de nociones conjuntistas es esencial y explícito en las construcciones realizadas por autores como Frege (1884) y Dedekind (1888), así como en las construcciones de tipo axiomático- constructivista de Peano (1889).

La definición de Frege (1884) y, posteriormente de Russell (1903) de número natural como una clase de equivalencia es interpretada como una representación del número natural; el conjunto de clases de equivalencia que constituyen los cardinales puede ser visto como un sistema de entidades dotado de la estructura numérica natural.

Por otra parte Benacerraf (1983) criticó la construcción de Frege afirmando que los números no deben confundirse con los conjuntos; que cada número no se puede identificar con una colección de conjuntos coordinables, ni como una propiedad de los conjuntos coordinables entre sí. Sin embargo, **los cardinales de los conjuntos**, su numerosidad, **son la razón de ser de los números**.

He aquí que los conceptos de número y conjunto están íntimamente ligados; no obstante estudiemos si es conveniente el estudio de la teoría de conjuntos previamente a la introducción de los números en las distintas etapas educativas: primaria, secundaria obligatoria y secundaria no obligatoria.

CONCLUSIÓN

La matemática moderna fracasó en el sentido de que no fue posible reorganizar toda la matemática a partir de la teoría de conjuntos como pretendía Cantor en un intento de formalizar ésta, pero permitió la comprensión de muchos conceptos a partir de los conjuntos gracias a la axiomatización de Hilbert. Tal vez esta matemática no era lo suficientemente consistente como para implantarla en los currículos de enseñanza pero es innegable su importancia y aparición implícita en ellos. Los dos ejemplos más claros, como hemos visto en este artículo y veremos en la segunda parte del mismo, lo constituyen por una parte la relación entre "número" y "conjunto" (pues los números se constituyen en conjuntos y los cardinales de los conjuntos son números) y por otra el uso de la teoría de conjuntos en el cálculo de probabilidades.

BIBLIOGRAFÍA

- **FEYNMAN, R (1962):** "New textbooks for de new maathematics". Engineering and Science, vol 28, pp. 9-15.
- **KLINE, M. (1973):** "El fracaso de la matemática moderna".Madrid: Siglo XXI.
- **FREUDENTHAL, H. (1983):** "Didactical phenomenology of mathematical structures". Dordrecht: Reídle.
- **GIMENO SACRISTÁN, J, (1996):** "El currículo: una reflexión sobre la práctica". Madrid: Morata.
- **CASTELNUOVO, E. (1993):** "Didáctica de la matemática moderna". México: Trillas.
- **DIENES, Z. P. (1965):** "La matemática moderna en la enseñanza primaria". Barcelona: Teide
- **RUSSELL, B. (1903):** "Los principios de las matemáticas".
- **FREGE, G. (1884):** "Los Fundamentos de la Aritmética" (en Frege 1972).
- **FREGE, G. (1972):** "Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética: otros estudios filosóficos". México: UNAM.
- **DEDEKIND, R. (1888):** "¿Qué son y para qué sirven los números?". Madrid: Alianza
- **PEANO, G. (1889):** "Arithmetices principia nova método exposita. Turín: Bocca.
- **BENACERRAF, H. (1983):** "Philosophy of mathematics: selected reading. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Para saber más:

- http://divulgamat.ehu.es/weborriak/publicacionesdiv/Libros/LiburuakDet.asp?Id=112
- http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_de_conjuntos

- http://www.cayocesarcaligula.com.ar/Textos/Cantor/georg_cantor_y_la_teoria_de_transfinitos.htm
- http://www.epsilones.com/paginas/t-paradojas.html

ASOCIACIÓN “PROFESORES EN EL AULA”
LOS CONTENIDOS EN LA ENSEÑANZA
Número 100 MAYO / 2009
Publicación semanal